Como o tensor de inércia é simétrico e real, sempre existe uma mudança de eixos (no corpo) que deixa I diagonal em relação a três eixos mutuamente ortogonais:

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{de eixos}]{\text{mudança}} \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

Estes eixos são chamados "Eixos Principais de Inércia" do corpo. Esta transformação é sempre possível e os momentos (I_1, I_2, I_3) são reais e positivos. Daqui em diante, sempre iremos a usar os eixos principais de inércia. Neste caso, o momentum angular e a energia de rotação se expressam por:

$$\vec{L} = I_1 \omega_1 \hat{e}_1 + I_2 \omega_2 \hat{e}_2 + I_3 \omega_3 \hat{e}_3,$$

$$K = \frac{1}{2}\left(I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2\right),$$

onde $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ são vetores unitários para os eixos principais e $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ os componentes da velocidade angular $\vec{\omega}$ segundo os mesmos eixos.

Escrevemos agora as equações de movimento.

Em relação ao sistema inercial do laboratório, temos:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N},$$

onde $\vec{N}$ é o torque das forças externas (as forças internas são eliminadas aos pares, pela III lei de Newton ('forte')). Por causa dos eixos principais de inércia é mais conveniente.

Para um vetor arbitrário $\vec{R}$, temos a relação:

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_i = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_r + \vec{\omega}\times\vec{R}\,,} \quad (*)$$

demonstrada antes. $\left(\frac{d}{dt}\right)_i$ é a derivada temporal tomada no SRI (lab) e $\left(\frac{d}{dt}\right)_r$ é referida ao corpo (sistema rotatório). Se o vetor $\vec{R}$ estiver fixo no corpo,

$$\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_r = 0,$$

e $$\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_i = \vec{\omega}\times\vec{R}.$$

Usamos a eq. (*) para $\vec{L}$; obtemos:

$$\vec{N} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_i = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_r + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

Referimos a eq. acima usando os eixos principais de inércia. Retiramos agora o subíndice 'r', lembrando que o sistema de referência está ligado ao corpo:

$$\vec{N} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right) + \vec{\omega} \times \vec{L} \, .$$

Em componentes:

$$N_1 = \frac{d}{dt}(I_1\omega_1) + (\omega_2 L_3 - \omega_3 L_2) \, ,$$

$$N_2 = \frac{d}{dt}(I_2\omega_2) + (\omega_3 L_1 - \omega_1 L_3) \, ,$$

$$N_3 = \frac{d}{dt}(I_3\omega_3) + (\omega_1 L_2 - \omega_2 L_1) \, .$$

Lembramos agora que os momentos I_i são constantes e que

$$L_i = I_i \omega_i \, , \quad i = x, y, z \, .$$

As equações obtidas são chamadas 'Equações de Euler para o corpo rígido':

$$N_1 = I_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(I_3-I_2),$$

$$N_2 = I_2\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3(I_1-I_3),$$

$$N_3 = I_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2(I_2-I_1).$$

Usualmente, os eixos principais de inércia do corpo apontam segundo eixos de simetria do corpo. Na ausência de forças externas se reduzem a:

$$I_1\dot{\omega}_1 = \omega_2\omega_3(I_2-I_3),$$

$$I_2\dot{\omega}_2 = \omega_1\omega_3(I_3-I_1),$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = \omega_1\omega_2(I_1-I_2),$$

a variação do momentum angular é devida aos momentos de inércia diferentes.

Ex. 1 Pião esférico, $I_1 = I_2 = I_3 = I$

$$I\dot{\omega}_1 = 0 = I\dot{\omega}_2 = I\dot{\omega}_3,$$

a velocidade $\vec{\omega}$ é constante no corpo.

Ex. 2 Pião simétrico, $I_1 = I_2 = I, \neq I_3$

Neste caso:

$$I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \implies \omega_3 = \text{cte}.$$

Para os outros componentes:

$$\dot{\omega}_1 = - \omega_3 \frac{(I_3 - I)}{I} \omega_2,$$

$$\dot{\omega}_2 = \omega_3 \frac{(I_3 - I)}{I} \omega_1.$$

Def. Velocidade angular de precessão Ω

$$\Omega \equiv \omega_3 \left(\frac{I_3 - I}{I} \right).$$

As equações ficam acopladas na forma:

$$\dot{\omega}_1 = - \Omega \omega_2,$$

$$\dot{\omega}_2 = \Omega \omega_1.$$

Considere a velocidade angular complexa $\omega_\perp$:

$$\omega_\perp \equiv \omega_1 + i \omega_2.$$

Ela satisfaz a equação:

$$\dot{\omega}_\perp = \dot{\omega}_1 + i \dot{\omega}_2 = - \Omega \omega_2 + i \Omega \omega_1$$
$$= i \Omega (\omega_1 + i \omega_2)$$

Ou seja:

$$\dot{\omega}_\perp = i\Omega\omega_\perp .$$

Solução: $\omega_\perp = A e^{i\Omega t}$, Escrevendo a constante A na forma polar:

$$A = A_0 e^{i\theta_0} ,$$

com (A_0, θ_0) reais, obtemos:

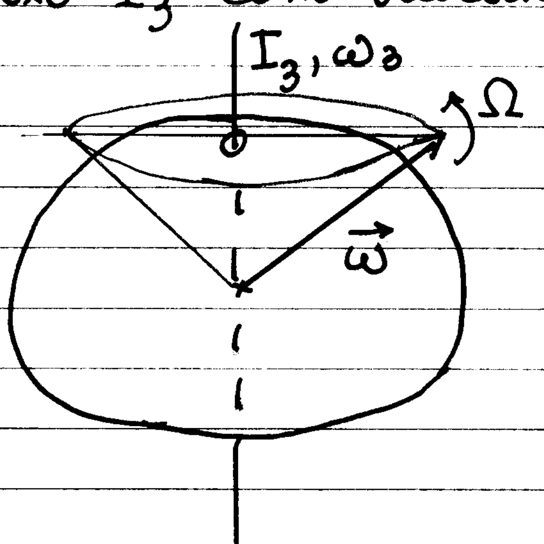
$$\omega_\perp = A_0 e^{i(\Omega t + \theta_0)} .$$

Tomando parte real e imaginária, temos:

$$\omega_1 = A_0 \cos(\Omega t + \theta_0) ,$$

$$\omega_2 = A_0 \,\mathrm{sen}(\Omega t + \theta_0) .$$

Resultado: a velocidade $\vec{\omega}$ precessa em torno do eixo I_3 com velocidade angular Ω



Ex. A terra é um pião simétrico com muita boa aproximação:

$$\frac{I_3 - I}{I} = 0.00327... \approx \frac{1}{306}$$

$$\frac{\Omega}{\omega_3} \approx \frac{1}{306} = \frac{T}{T_\Omega} \Rightarrow T_\Omega = 306\,T$$

ω_3 é muito parecido com $\vec{\omega}$, então $T = 1$ [dia]

$$\Rightarrow \quad T_\Omega = 306 \text{ [dias]},$$

aproximadamente 10 meses. Um observador na terra encontrará que o eixo de rotação descreve um circulo em torno do Polo Norte em aproximadamente 10 meses. Se observa um período de mais ou menos 427 dias. Porque a discrepância?

O efeito, de todo modo, é muito pequeno e de difícil observação. A distância entre o eixo de simetria e o eixo de rotação no polo Norte é de apenas $d \approx 10$ m.

§ Sistema de coordenadas rotatório

Discutimos aqui o movimento de um sistema de partículas em relação a um sistema de coordenadas rotatório. O caso mais relevante nesta categoria é o movimento de uma partícula em relação a um sistema de coordenadas que roda junto com a terra.

Comparamos o movimento observado desde um sistema inercial, com o movimento observado desde o sistema rotatório. Supomos que o CM da terra é usado como origem para ambos sistemas de referência. Seja $\vec{r}$ o vetor posição de uma partícula. Temos:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_i = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_r + \vec{\omega}\times\vec{r},$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_r + \vec{\omega}\times\vec{r}.$$

Calculamos a aceleração:

$$\vec{a}_i = \left(\frac{d\vec{v}_i}{dt}\right)_i = \left(\frac{d\vec{v}_i}{dt}\right)_r + \vec{\omega}\times\vec{v}_i$$

$$= \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_r + \vec{\omega}\times\vec{v}_r + \vec{\omega}\times\left(\vec{v}_r + \vec{\omega}\times\vec{r}\right)$$

$$\vec{a}_i = \vec{a}_r + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

Da eq. de Newton:

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}_i = m\vec{a}_r + 2m(\vec{\omega}\times\vec{v}_r) + m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}$$

Ou seja:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - 2m(\vec{\omega}\times\vec{v}_r) - m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \equiv \vec{F}_{ef}.$$

Para um observador no sistema rotatório, aparece que a partícula se movimenta sobre a ação de uma força efetiva:

$$\vec{F}_{ef} = \vec{F} - 2m(\vec{\omega}\times\vec{v}_r) - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

Força centrífuga: $-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$

Força de Coriolis: $-2m(\vec{\omega}\times\vec{v}_r)$

Note que a força de Coriolis só aparece quando a partícula está em movimiento no sistema rotatório. Na superfície da terra, as acelerações são pequenas comparadas com g, a aceleração de gravidade, mas podem produzir efeitos observáveis.

Exemplos:

1. Pêndulo de Foucault
2. Ventos alísios e contra-alísios